Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
CO3121 Probabilidad para Ingenieros
Preparaduría Semana 7.

1.(4.4) Suponga que y tiene una función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} ky(1-y), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

a. Encuentre el valor de k que convierte a $f(y)$ en una función de densidad de probabilidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1 \;\rightarrow\; \int_0^1 (ky - ky^2)\,dy = \int_0^1 ky\,dy - \int_0^1 ky^2\,dy = \frac{k}{2} - \frac{k}{3} = 1 \;\rightarrow\; \frac{k}{6} = 1 \;\rightarrow\; \boxed{k = 6}$$

b. Calcule $P(0{,}4 \le y \le 1)$

$$P(0{,}4 \le y \le 1) = \int_{0,4}^{1} f(y)\,dy = \int_{0,4}^{1} 6y(1-y)\,dy = 6\left(\int_{0,4}^{1} y\,dy - \int_{0,4}^{1} y^2\,dy\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2} - 0{,}08 - \frac{1}{3} + 0{,}0213\right) = 6(0{,}1083) = 0{,}6498 \;\rightarrow\; \boxed{P(0{,}4 \le y \le 1) = 0{,}6498}$$

c. Calcule $P(y \le 0{,}4 | y \le 0{,}8)$

$$P(y \le 0{,}4 | y \le 0{,}8) = \frac{P(y \le 0{,}4 \cap y \le 0{,}8)}{P(y \le 0{,}8)} = \frac{P(y \le 0{,}4)}{P(y \le 0{,}8)}$$

$$P(y \le 0{,}4) = \int_0^{0,4} f(y)\,dy = \int_0^{0,4} 6y(1-y)\,dy = 6(0{,}08 - 0{,}0213) = 0{,}3522$$

$$P(y \le 0{,}8) = \int_0^{0,8} f(y)\,dy = \int_0^{0,8} 6y(1-y)\,dy = 6(0{,}32 - 0{,}17) = 0{,}9$$

$$\rightarrow\; P(y \le 0{,}4 | y \le 0{,}8) = \frac{0{,}3522}{0{,}9} = 0{,}3913 \;\rightarrow\; \boxed{P(y \le 0{,}4 | y \le 0{,}8) = 0.3913}$$

d. Calcule $P(y < 0{,}4 | y < 0{,}8)$

$P(y < 0{,}4 | y < 0{,}8) = P(y \le 0{,}4 | y \le 0{,}8)$, ya que $P(y = 0{,}4) = P(y = 0{,}8) = 0$.

2.(4.7) Un abastecedor de queroseno tiene un tanque de 150 galones que llena a principios de cada semana. La demanda semanal muestra un comportamiento de frecuencia relativa que aumenta gradualmente hasta 100 galones y luego se estabiliza en un nivel entre 100 y 150 galones, y denota la demanda semanal en cientos de galones, la frecuencia relativa de demanda se puede representar mediante el modelo

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & 1 < y < 1{,}5 \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

a. Encuentre $F(y)$.

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} 0\ dt = \underline{0}, \qquad para\ y < 0$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{y} t\ dt = \underline{\frac{y^2}{2}}, \qquad para\ \ 0 \leq y \leq 1$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{1} t\ dt + \int_{1}^{y} dt = \underline{y - \frac{1}{2}}, \qquad para\ 1 < y \leq 1{,}5$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{1} t\ dt + \int_{1}^{1{,}5} dt + \int_{1{,}5}^{y} 0\ dt = \underline{1}, \qquad para\ y > 1{,}5$$

b. Calcule $P(0 \leq y \leq 0{,}5)$

$$P(0 \leq y \leq 0{,}5) = \int_{0}^{0{,}5} t\ dt = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \ \rightarrow\ \boxed{P(0 \leq y \leq 0{,}5) = 0{,}125}$$

c. Encuentre $P(0{,}5 \leq y \leq 1{,}2)$

$$P(0{,}5 \leq y \leq 1{,}2) = \int_{0{,}5}^{1} t\ dt + \int_{1}^{1{,}2} dt = \frac{3}{8} + 0{,}2 = 0{,}575 \ \rightarrow\ \boxed{P(0{,}5 \leq y \leq 1{,}2) = 0{,}575}$$

3.(4.13) Sea la función de distribución de una variable aleatoria y:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{y}{8}, & 0 < y < 2 \\ \frac{y^2}{16}, & 2 \leq y < 4 \\ 1, & y \geq 4 \end{cases}$$

a. Encuentre la función de densidad de y.

$$f(y)=\frac{dF(y)}{dy}=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{1}{8}, & 0<y<2\\ \frac{y}{8}, & 2\le y<4\\ 0, & y\ge 4\end{cases}\quad\rightarrow\quad \boxed{f(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 0<y<2\\ \frac{y}{8}, & 2\le y<4\end{cases}}$$

b. Calcule $P(1\le y\le 3)$

$$P(1\le y\le 3)=\int_1^3 f(y)\,dy=\int_1^2\frac{1}{8}\,dt+\int_2^3\frac{t}{8}\,dt=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}=\frac{7}{16}\quad\rightarrow\quad\boxed{P(1\le y\le 3)=\frac{7}{16}}$$

c. Encuentre $P(y\ge 1{,}5)$

$$P(y\ge 1{,}5)=\int_{1,5}^4 f(y)\,dy=\int_{1,5}^2\frac{1}{8}\,dt+\int_2^4\frac{t}{8}\,dt=\frac{1}{16}+\frac{12}{16}=\frac{13}{16}\quad\rightarrow\quad\boxed{P(y\ge 1{,}5)=\frac{13}{16}}$$

d. Calcule $P(y\ge 1|y\le 3)$

$$P(y\ge 1|y\le 3)=\frac{P(1\le y\le 3)}{P(y\le 3)},\qquad P(1\le y\le 3)=\frac{7}{16}$$

$$P(y\le 3)=\int_0^2\frac{1}{8}\,dt+\int_2^3\frac{t}{8}\,dt=\frac{2}{8}+\frac{5}{16}=\frac{9}{16}\quad\rightarrow\quad P(y\le 3)=\frac{9}{16}$$

$$P(y\ge 1|y\le 3)=\frac{7/16}{9/16}=\frac{7}{9}\quad\rightarrow\quad\boxed{P(y\ge 1|y\le 3)=\frac{7}{9}}$$

4.(4.15) y tiene una función de densidad:

$$f(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}y^2+y, & 0\le y\le 1\\ 0, & otro\ caso\end{cases}$$

Encuentre la media y la varianza de y.

$$E(y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(y)\,dy=\int_0^1 y\left(\frac{3}{2}\,y^2+y\right)\,dy=\int_0^1\frac{3}{2}\,y^3dy+\int_0^1 y^2\,dy=\frac{3}{8}+\frac{1}{3}=\frac{17}{24}=0{,}708$$

$$\rightarrow\quad\boxed{E(y)=0{,}708}$$

$Var(y) = E(y^2) - \left(E(y)\right)^2.$

$$E(y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f(y) = \int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{2}\, y^2 + y\right) dy = \int_0^1 \frac{3}{2}\, y^4\, dy + \int_0^1 y^3\, dy = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{22}{40} = 0{,}55$$

$$\rightarrow\ Var(y) = 0{,}55 - (0{,}708)^2 = 0{,}49\ \rightarrow\ \boxed{Var(y) = 0{,}49}$$

5.(4.19) Si y tiene una función de distribución

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \dfrac{y}{8}, & 0 < y < 2 \\ \dfrac{y^2}{16}, & 2 \leq y < 4 \\ 1, & y \geq 4 \end{cases}$$

Calcule la media y la varianza.

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy}\ \rightarrow\ f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}, & 0 < y < 2 \\ \dfrac{y}{8}, & 2 \leq y < 4 \end{cases}$$

$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy = \int_0^2 y \cdot \frac{1}{8}\, dy + \int_2^4 y \cdot \frac{y}{8}\, dy = \frac{1}{4} + \frac{7}{3} = \frac{31}{12} = 2{,}583\ \rightarrow\ \boxed{E(y) = 2{,}583}$$

$Var(y) = E(y^2) - \left(E(y)\right)^2.$

$$E(y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f(y)\, dy = \int_0^2 y^2 \cdot \frac{1}{8}\, dy + \int_2^4 y^2 \cdot \frac{y}{8}\, dy = \frac{1}{3} + \frac{15}{2} = \frac{47}{6} = 7{,}833$$

$$\rightarrow\ Var(y) = 7{,}833 - (2{,}583)^2 = 1{,}161\ \rightarrow\ \boxed{Var(y) = 1{,}161}$$

6.(4.21) En ciertas muestras minerales, la proporción de impurezas por muestra, y, es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\, y^2 + y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

Cada muestra tiene un valor en dólares de $w = 5 - 0{,}5\, y$. Calcule la media y la varianza de w.

$$E(w) = \int_{-\infty}^{\infty} w\, f(y)\, dy = \int_0^1 \left(5 - \frac{1}{2}\, y\right)\left(\frac{3}{2}\, y^2 + y\right) dy = \int_0^1 \left(7y^2 + 5y - \frac{3}{4} y^3\right) dy = \frac{7}{3} + \frac{5}{2} - \frac{3}{16}$$

$$= 4{,}6458\ \rightarrow\ \boxed{E(w) = 4{,}6458}$$

$Var(w) = E(w^2) - \left(E(w)\right)^2.$

$$E(w^2) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 \, f(y)\, dy = \int_0^1 \left(5 - \frac{1}{2}\, y\right)^2 \left(\frac{3}{2}\, y^2 + y\right) dy = \int_0^1 \left(25 - 5y + \frac{1}{4} y^2\right)\left(\frac{3}{2} y^2 + y\right) dy$$

$$= \frac{0{,}375}{5} - \frac{7{,}25}{4} + \frac{32{,}5}{3} + \frac{25}{2} = 21{,}5958$$

$$\rightarrow \; Var(w) = 21{,}5958 - (4{,}6458)^2 = 0{,}0123 \; \rightarrow \; \boxed{Var(w) = 0{,}0123}$$

Por lo tanto, la media es de 4,6458 dólares y la varianza es 0,0123.

7.(4.33) Al estudiar licitaciones de embarque, una empresa dedicada a la fabricación de microcomputadoras encuentra que los contratos nacionales tienen licitaciones bajas distribuidas uniformemente entre 20 y 25 (en miles de dólares). Calcule la probabilidad de que la baja licitación de embarque del próximo contrato nacional

a. Sea inferior a 22.000 dólares

Sea Y: próximo contrato nacional de baja licitación de embarque.

$$P(Y < 22) = \int_{20}^{22} \frac{1}{25 - 20} dy = \int_{20}^{22} \frac{1}{5}\, dy = \frac{22 - 20}{5} = \frac{2}{5} \;\rightarrow\; \boxed{P(Y < 22) = \frac{2}{5}}$$

b. Rebase los 24.000 dólares

$$P(Y > 24) = \int_{24}^{25} \frac{1}{5}\, dy = \frac{25 - 24}{5} = \frac{1}{5} \;\rightarrow\; \boxed{P(Y > 24) = \frac{1}{5}}$$

8.(4.37) Un conmutador recibe una llamada telefónica aleatoria en un intervalo de un minuto. El conmutador se satura por completo durante 15 segundos en ese periodo de un minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que la llamada entre cuando el conmutador no esté completamente saturado?

Sea Y: tiempo en que entra la llamada. Y tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 60)$, por lo que la probabilidad es

$$P(Y > 15) = \int_{15}^{60} \frac{1}{60 - 0} dy = \frac{60 - 15}{60} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; \boxed{P(Y > 15) = \frac{3}{4}}$$

Por lo que la probabilidad de que entre la llamada cuando el conmutador no esté completamente saturado es de $3/4$.